MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a IX -a

Problema 1.

Considerăm progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = 2n-1$, $n\in\mathbb{N}^*$ și progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$, $b_n = 2^{2n-1}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Determinați $n\in\mathbb{N}^*$ încât $a_1+a_2+a_3+...+a_n = 2018^2$.

b) Demonstrați că rezultatul calculului $b_{n+1}-3(b_1+b_2+...+b_n)$ nu depinde de $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Demonstrați că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea $b_n \geq 1+a_n$.

SOLUȚIE:

a) $a_1+a_2+...+a_n = \dfrac{n(a_1+a_n)}{2} = n^2$ 2p

$n^2 = 2018^2 \Rightarrow n = 2018$ 1p

b) $b_1+b_2+...+b_n = b_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1} = 2\cdot\dfrac{4^n-1}{3}$ 1p

$b_{n+1}-3(b_1+b_2+...+b_n) = 2^{2n+1}-2\cdot(4^n-1) = 2$ 1p

c) Pentru $n=1$, $b_1 \geq 1+a_1 \Leftrightarrow 2\geq 2$ și pentru ca inducția matematică să confirme inegalitatea $b_n \geq 1+a_n$ pentru orice $n\geq 1$ avem de demonstrat implicația $b_k \geq 1+a_k \Rightarrow b_{k+1}\geq 1+a_{k+1}$ 1p

dar $b_{k+1} = 4b_k \geq 4\cdot(1+a_k) = 8k \geq 2k+2 = 1+a_{k+1}$ 1p

Problema 2.

Spunem că perechea de numere naturale nenule $(m;n)$ este *interesantă* dacă $0,(3) < \dfrac{m}{n} < 0,34$.

a) Stabiliți dacă perechea $(330;1000)$ este interesantă.

b) Determinați valorile posibile ale lui n astfel încât perechea $(330;n)$ să fie interesantă.

c) Aflați câte perechi de numere interesante de forma $(m;1000)$ sunt.

d) Determinați m și n astfel încât perechea $(m;n)$ să fie interesantă și m să aibă valoare minimă.

SOLUȚIE:

a) $\dfrac{m}{n} = \dfrac{330}{1000} = 0,33 < 0,(3)$, contrazice $0,(3) < \dfrac{m}{n}$, deci $(330;1000)$ nu este interesantă 1p

b) $m = 330 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{330}{n} < \frac{34}{100}$ 1p

$970,... < n < 990 \Rightarrow n \in \{971; 972; ...; 989\}$ 1p

c) $n = 1000$, $\frac{1}{3} < \frac{m}{1000} < \frac{34}{100}$ 1p

$333 < m < 340 \Rightarrow m \in \{334; 335; ...; 339\}$, 6 soluții 1p

d) $\frac{1}{3} < \frac{m}{n} < \frac{34}{100} \Leftrightarrow \frac{100m}{34} < n < 3m$ 1p

cum n și $3m$ sunt numere naturale, există n numai dacă $\frac{100m}{34} < 3m - 1$, deci $m > 17$, $m_{\min} = 18$

și atunci $n = 53$ 1p

Problema 3.

Un atlet aleargă în jurul unui teren de formă dreptunghiulară $ABCD$ cu lungimea de $150m$ și lățimea de $50m$, pe traseul $A \to B \to C \to D \to A \to B \to ...$ și fără a-și schimba sensul de alergat.

El pleacă din A cu zero puncte și de fiecare dată când ajunge într-unul din vârfurile $B, C, D, A, B, C, ...$ primește puncte după următoarea regulă: câte 1 punct în B; câte 2 puncte în C; câte 3 puncte în D; câte 4 puncte în A.

a) Aflați în ce punct s-a aflat atletul în momentul în care a înregistrat 53 de puncte.
b) Determinați câți kilometri a parcurs atletul de la momentul plecării până când a înregistrat 53 de puncte.
c) Aflați dacă atletul poate obține exact 2018 puncte.

SOLUȚIE:

a) La prima parcurgere $A \to B \to C \to D$ atletul obține $1+2+3=6$ puncte 1p
și la fiecare parcurgere următoare $D \to A \to B \to C$ obține câte $4+1+2+3=10$ puncte 1p
După 5 parcurgeri complete $A \to B \to C \to D$ obține 46 puncte și este în D 1p
și continuând ajunge în A cu cu 50 puncte, în B cu 51 puncte, în C cu 53 puncte 1p

b) Atletul aleargă $(5 \cdot P_{ABCD} + 200)m = 2,2Km$ 1p

c) Atletul poate obține puncte în una din variantele: $10n; 10n+1; 10n+3; 10n+6$, $n \in \mathbb{N}$ 1p
și deoarece $2018 = 2010 + 8$, atletul nu poate înregistra 2018 puncte 1p

Problema 4.

Considerăm paralelogramul $ABCD$ și punctele $M \in (DC)$, $N \in (BM)$ astfel încât $DM = 3MC$ și $BN = 4NM$.

a) Verificați că $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

b) Demonstrați că $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

c) Exprimați vectorul $\overrightarrow{AN}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AD}$.

d) Demonstrați că punctele A, N, C sunt coliniare și calculați valoarea raportului $\frac{AN}{NC}$.

SOLUȚIE:

a) $\overrightarrow{MC}$ și $\overrightarrow{AB}$ sunt coliniari și de același sens, deci $\overrightarrow{MC} = \frac{MC}{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ 1p

b) $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ 2p

c) $\overrightarrow{BN} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BM} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ 1p

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{4}{5}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$ 1p

d) $\overrightarrow{AN} = \frac{4}{5}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$, deci A, N, C sunt coliniare 1p

$\overrightarrow{AN} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{NC}$, deci $\frac{AN}{NC} = 4$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X -a

Problema 1.

Pentru fiecare $x\in(0;+\infty)$, considerăm numerele $a_n(x)=\left(\sqrt{x}\right)^{21-n}\cdot\left(\sqrt[3]{x}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că există $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $a_n(x)$ nu depinde de x.

b) Determinați $n\in\mathbb{N}^*$ în cazul în care $a_n(3)=27$.

c) Determinați $x\in(0;+\infty)$ în cazul în care $a_{45}(x)=3$.

d) Demonstrați că, pentru o infinitate de valori $x\in(0;+\infty)$, toate numerele $a_n(x)$ sunt raționale.

SOLUŢIE:

a) $a_n(x)=x^{\frac{21-n}{2}}\cdot x^{\frac{n}{3}}=x^{\frac{63-n}{6}}$ 1p

pentru $n=63$, $a_{63}(x)=1$ nu depinde de x 1p

b) $a_n(3)=27 \Rightarrow \frac{63-n}{6}=3 \Rightarrow n=45$ 2p

c) $a_{45}(x)=3 \Rightarrow x^3=3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{3}$ 2p

d) pentru $x=2^{6k}$, $(\forall)\ k\in\mathbb{Z}$, $\Rightarrow a_n(x)\in\mathbb{Q}$ 1p

Problema 2.

Pentru fiecare număr real a definim numărul $z_a=\frac{a+i}{1+a\cdot i}$, unde $i^2=-1$.

a) Demonstrați că $|z_a|=1$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $z_a\neq -i$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

c) Determinați numerele reale a pentru care partea imaginară a numărului z_a este egală cu $-\frac{4}{5}$.

d) Calculați produsul $p=z_1\cdot z_{\frac{1}{2}}\cdot z_{\frac{1}{3}}\cdot\ldots\cdot z_{\frac{1}{2018}}\cdot z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot\ldots\cdot z_{2018}$

SOLUŢIE:

a) $|z_a|=\frac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{1+a^2}}=1$ 2p

b) $z_a=-i \Rightarrow a+i=-i+a$, fals 1p

c) $z_a = \frac{2a}{1+a^2} + \frac{1-a^2}{1+a^2} \cdot i$ 1p

$\frac{1-a^2}{1+a^2} = -\frac{4}{5} \Rightarrow a = -3$ sau $a = 3$ 1p

d) Observăm că $z_{\frac{1}{a}} = \frac{1+ai}{a+i} = \frac{1}{z_a}$, deci $z_{\frac{1}{a}} \cdot z_a = 1$, $(\forall) a \in \mathbb{R}^*$ 1p

$\Rightarrow p = 1$ 1p

Problema 3.

Fie numărul real $a = \sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$.

a) Verificați $a^3 - 6a - 8 = 0$.

b) Demonstrați că $a \in \left(\sqrt{6};\, 3\right)$.

c) Demonstrați că numărul $x = \log_2\left(a^2 - 6\right) + \log_a\left(\frac{8}{a} + 6\right) + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{a}$ este natural.

SOLUȚIE:

a) $a^3 = 4 + 2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{\left(4+2\sqrt{2}\right)\left(4-2\sqrt{2}\right)}\left(\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}\right) = 8 + 6a$ 2p

b) Evident, $a > 0$ și din $8 = a\left(a^2 - 6\right) \Rightarrow a > \sqrt{6}$ 1p

Dacă $a \geq 3$, atunci $8 = a\left(a^2 - 6\right) \geq 9$, fals 1p

c) $x = \log_2 \frac{8}{a} + \log_a a^2 + \log_2 a$ 1p

$x = \log_2\left(\frac{8}{a} \cdot a\right) + 2$ 1p

$x = 5$ 1p

Problema 4.

Un program de calculator simulează o traiectorie curbă închisă, de lungime $15\,cm$ și pe care două mobile pornesc din același punct dar în sensuri opuse, respectiv cu legile de deplasare date de funcțiile $f(x) = x + 2^x - 1$ și $g(x) = x + \log_2(x+1)$, unde variabila $x \geq 0$ reprezintă momentul măsurat în secunde iar $f(x)$ și $g(x)$ reprezintă distanța parcursă de cele două mobile de la momentul zero al deplasării până la momentul $x \geq 0$, măsurată în centimetri. Vom nota cu M mulțimea momentelor de întâlnire ale celor două mobile. Răspundeți la următoarele cerințe:

a) Demonstrați că $x \in M$ dacă și numai dacă $(\exists) n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $f(x) + g(x) = 15n$.

b) Determinați momentul primei întâlniri a celor două mobile.

c) Demonstrați că $x = 2^{68} - 1 \in M$.

SOLUȚIE:

a) Considerând $h : [0; +\infty)$, $h(x) = f(x) + g(x)$

$\Rightarrow h(x) = 2x + 2^x + \log_2(x+1) - 1$ este funcție strict crescătoare, cu $h(0) = 0$ 1p

$\Rightarrow$ cum lungimea traseului este de $15\,cm$ și cele două mobile se deplasează pe traiectorie în sensuri opuse, are loc întâlnirea în fiecare moment $x > 0$ în care $h(x) = 15n$, $n \in \mathbb{N}^*$ 1p

b) Cum $h(x) = f(x) + g(x)$ este strict crescătoare, cu $h(0) = 0$, prima întâlnire are loc la unicul moment $x > 0$ în care se verifică $h(x) = 15$ 1p

Folosind monotonia, se caută și se găsește $h(3) = 15$, deci $x = 3$ este momentul primei întâlniri 1p

c) $x=2^{68}-1\in M \Leftrightarrow h\left(2^{68}-1\right)=15n$, cu $n\in\mathbb{N}^*$ 1p

$h\left(2^{68}-1\right)=2\left(2^{68}-1\right)+2^{2^{68}-1}+67$, din care $h\left(2^{68}-1\right)=2\left(16^{17}-1\right)+8\left(16^{\left(2^{66}-1\right)}-1\right)+75$ 1p

dar $\left(16^{k}-1\right)\vdots 15$ $(\forall)k\in\mathbb{N}$ și implicit $h\left(2^{68}-1\right)\vdots 15$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI -a

Problema 1.

Fie matricea unitate $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și matricea $A=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Calculați $B=A-a\cdot I_3$.

b) Verificați $B^2=B+2I_3$ și $A^2=(2a+1)\cdot A-\left(a^2+a-2\right)\cdot I_3$.

c) Demonstrați că A este inversabilă pentru orice $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ și determinați A^{-1}.

SOLUȚIE:

a) $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ 1p

b) $B^2=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=B+2I_3$ 1p

$A^2=(aI_3+B)^2=a^2I_3+2aB+B^2=a^2I_3+2a(A-aI_3)+(A-aI_3)^2=$ 1p

$...=(2a+1)\cdot A-\left(a^2+a-2\right)\cdot I_3$ 1p

c) $\det A=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=...=(a+2)(a-1)^2$ 1p

$\det A\neq 0 \iff a\notin\{-2;1\}$ 1p

Cum $A^2=(2a+1)\cdot A-\left(a^2+a-2\right)\cdot I_3$, $A^{-1}=\dfrac{2a+1}{a^2+a-2}\cdot I_3-\dfrac{1}{a^2+a-2}\cdot A$ 1p

Problema 2.

Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ și determinantul $D(a,b,c)=\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$.

Totodată, în sistemul de coordonate (xOy), considerăm punctele $A_n(n;n^2)$, $n\in\mathbb{Z}$.

a) Demonstrați că $D(a,b,c)=(b-a)(c-a)(c-b)$.

b) Demonstrați că pentru orice trei numere întregi distincte m,n,k, punctele $A_m(m;m^2)$, $A_n(n;n^2)$, $A_k(k;k^2)$ sunt necoliniare și aria triunghiului $A_mA_nA_k$ este număr natural.

c) Demonstrați că aria triunghiului $A_{n-2018}A_nA_{n+2018}$ nu depinde de $n\in\mathbb{Z}$.

d) Demonstrați că nici unul din triunghiurile $A_mA_nA_k$, cu $m,n,k\in\mathbb{Z}$, nu are aria egală cu 2.

SOLUȚIE:

a) Verificare $D(a,b,c)=...=(b-a)(c-a)(c-b)$ 2p

b) $S(A_mA_nA_k)=\frac{1}{2}|D(m;n;k)|=\frac{1}{2}|(m-n)(m-k)(n-k)|\in\mathbb{N}$ deoarece din cele trei numere $m,n,k\in\mathbb{Z}$, două au aceeași paritate și astfel diferența lor este număr par, deci $|(m-n)(m-k)(n-k)|\vdots 2$ 2p

c) $A_{n-2018}A_nA_{n+2018}=...=2018^3$ care nu depinde de $n\in\mathbb{Z}$ 2p

d) Fără a afecta generalitatea, putem considera $m>n>k$ și atunci, în ipoteza $S(A_mA_nA_k)=2$, am avea $(m-n)(m-k)(n-k)=4$. Cum $m,n,k\in\mathbb{Z}$ sunt distincte $\Rightarrow$ $m-k>m-n\geq 1$ și $m-k>n-k\geq 1$, rezultând $m-k=4$ și $m-n=n-k=1$, imposibil 1p

Problema 3.

Două funcții f,g le numim *a-înrudite*, $a\in\mathbb{R}$, dacă există și este finită limita $\lim_{x\to 1}\left[f(x)-a\cdot g(x)\right]$.

a) Demonstrați că funcțiile $f(x)=\frac{x^3-x^2-2x-2}{x^2-1}$ și $g(x)=\frac{x-2}{x-1}$ sunt *2-înrudite.*

b) Determinați $a\in\mathbb{R}$ încât $f(x)=\frac{\sqrt{4x+5}}{x^2-x}$ și $g(x)=\frac{1}{(x-1)\sqrt{x}}$ să fie *a-înrudite.*

c) Dacă alegem trei funcții f,g,h încât f și g sunt *a-înrudite* iar g și h sunt *b-înrudite*, demonstrați că atunci f și h sunt *ab-înrudite.*

SOLUȚIE:

a) $\lim_{x\to 1}\left[f(x)-2g(x)\right]=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-x^2-2x-2}{x^2-1}-\frac{2x-4}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-2x-2)}{(x-1)(x+1)}=-\frac{3}{2}$ 2p

b) $\lim_{x\to 1}\left[f(x)-a\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{4x-5}-a\sqrt{x}}{(x-1)\cdot x}$ este finită $\Leftrightarrow$ $a=3$ 1p

$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\left[f(x)-a\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to 1}\frac{5-5x}{(x-1)\cdot x\left(\sqrt{4x+5}+3\sqrt{x}\right)}=...=-\frac{5}{6}$ 2p

c) $f(x)-ab\cdot h(x)=f(x)-a\cdot g(x)+a\left[g(x)-b\cdot h(x)\right]$ 1p

deci $\lim_{x\to 1}\left[f(x)-ab\cdot h(x)\right]$ există și este finită 1p

Problema 4.

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ încât funcția $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + b} + cx$ are domeniul maxim $\mathbb{R}$ și $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

a) Demonstrați că $a = 2$, $b \in [1; +\infty)$ și $c = -1$.
b) Demonstrați că toate funcțiile cu această proprietate au aceleași asimptote.
c) Demonstrați că nici una din funcțiile obținute nu este funcție rațională.

SOLUȚIE:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2 + ax + b} + cx\right) = 1$ obligă $c = -1$, în caz contrar limita fiind infinită 1p

$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2 + ax + b} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{ax + b}{\sqrt{x^2 + ax + b} + x} = \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$ 1p

din $x^2 + ax + b \geq 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow b \in [1; +\infty)$ 1p

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + b} - x$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, fiind elementară, este continuă pe domeniul ei de definiție, deci nu are asimptote verticale și cum $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2 + 2x + b} - x\right) = 1$, are la $+\infty$ asimptotă orizontală $y = 1$..................... 1p

Cum $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2 + 2x + b} - x\right) = +\infty$, f nu are asimptotă orizontală spre $-\infty$.

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2 + 2x + b} - x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2 - 2x + b} + x}{-x} = -2 \Rightarrow m = -2$ 1p

$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2 + 2x + b} + x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2 - 2x + b} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x + b}{\sqrt{x^2 - 2x + b} + x} = -1$

$\Rightarrow$ $y = -2x - 1$ asimptotă oblică spre $-\infty$ 1p

c) Dacă $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + b} - x$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ar fi funcție rațională, atunci asimptota spre $+\infty$, $y = 1$, ar fi și asimptotă spre $-\infty$, contradicție cu $y = -2x - 1$ asimptotă oblică spre $-\infty$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII -a

Problema 1.

Considerăm structura algebrică $(\mathbb{R};\circ)$ cu legea de compoziție $x\circ y=3xy-2x+y-1$, $(\forall)x,y\in\mathbb{R}$.

a) Demonstrați $(\mathbb{R};\circ)$ este structură neasociativă.

b) Stabiliți dacă $(\mathbb{R};\circ)$ admite element neutru.

c) Rezolvați în $(\mathbb{R};\circ)$ sistemul $\begin{cases}(x-1)\circ y=9\\(x+1)\circ(y-1)=13\end{cases}$

SOLUȚIE:

a) Structura este neasociativă dacă are loc $(x\circ y)\circ z\neq x\circ(y\circ z)$, măcar într-o situație particulară 1p

Verificare particulară, spre exemplu $(0\circ1)\circ2\neq0\circ(1\circ2)$ 1p

b) Dacă $e\in\mathbb{R}$ este element neutru, $x\circ e=e\circ x=x$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$ și atunci

$x\circ e=x$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $e=1$ 1p

$e\circ x=x$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $3ex-2e+x-1=x$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$ și împreună cu $e=1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $x=1$ $(\forall)x\in\mathbb{R}$ (!!!) contradicție, deci $(\mathbb{R};\circ)$ nu admite element neutru. 1p

c) $(x-1)\circ y=9$ $\Leftrightarrow$ $3xy-2y-2x=8$ 1p

$(x-1)\circ y=9$ $\Leftrightarrow$ $3xy+4y-5x=20$ 1p

Soluții $(x;y)=(2;3)$ și $(x;y)=(-4;0)$ 1p

Problema 2.

Fie matricele $X(a)=a\cdot A+I_2$, cu $a\in\mathbb{R}$, $A=\begin{pmatrix}-2&1\\-6&3\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și considerăm mulțimea $G=\{X(a)/a>-1\}$.

a) Demonstrați că pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$ se verifică $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)$.

b) Demonstrați că G împreună cu operația de înmulțire a matricelor este grup comutativ.

c) Calculați produsul $X\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot X\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\ldots\cdot X\left(-\frac{2017}{2018}\right)\cdot X(1)\cdot X(2)\cdot\ldots\cdot X(2018)$.

SOLUȚIE:

a) $X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+(a+b)A+abA^2$, dar $A^2=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -6 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -6 & 3\end{pmatrix}=A$ și se confirmă $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)$ 1p

b) Înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe G, deoarece din $a>-1$ și $b>-1$ se obține $(a+1)(b+1)>0$, din care $a+b+ab>-1$ 1p
Înmulțirea matricelor din $M_2(\mathbb{R})$ este asociativă iar $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)$ arată că în G înmulțirea este și comutativă 1p
$I_2=X(0)\in G$ este element neutru 1p
pentru $a>-1$, $\left[X(a)\right]^{-1}=X\left(\frac{-a}{a+1}\right)\in G$ 1p

c) Cum $X(a)\cdot X\left(\frac{-a}{a+1}\right)=I_2$, folosind comutativitatea și asociativitatea, produsul devine 1p
$\left[X(1)\cdot X\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\left[X(2)\cdot X\left(-\frac{2}{3}\right)\right]\cdot\ldots\cdot\left[X(2017)\cdot X\left(-\frac{2017}{2018}\right)\right]\cdot X(2018)=X(2018)$ 1p

Problema 3.

Considerăm funcția $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) Calculați $\int f(x)dx$.

b) Demonstrați că orice primitivă F a funcției f verifică $F(2)<F(3)$.

c) Demonstrați că funcția $g:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left|f(x)\right|$, admite primitive și determinați, din mulțimea primitivelor ei, acea primitivă G care verifică $G(1)=0$.

SOLUȚIE:

a) $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}(\ln x-2)+C$ 3p

b) $F'(x)=f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}>0$ pentru $x>1$, deci F este crescătoare pe $(1;+\infty)$ 1p
și astfel $F(2)<F(3)$ 1p

c) $g(x)=\begin{cases}-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x\in(0;1)\\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x\in[1;+\infty)\end{cases}\Rightarrow G(x)=\begin{cases}-2\sqrt{x}(\ln x-2)+C_1, & x\in(0;1)\\ 2\sqrt{x}(\ln x-2)+C_2, & x\in[1;+\infty)\end{cases}$ 1p
G derivabilă, $G(1)=0\Rightarrow C_1=-4$, $C_2=4$ 1p

Problema 4.

Rata de descreștere a unei populații de bacterii de pe o plantă, după t zile de la administrarea de insecticid, este dată de formula $B'(t)=\frac{-3000}{(1+0,2t)^2}$, $t\geq 0$. Dacă numărul inițial al bacteriilor a fost de 8.000, aflați după câte zile numărul bacteriilor va fi cel mult egal cu 500.

SOLUȚIE:

a) $B(t) = -3000 \cdot \int \frac{1}{(1+0,2t)^2} dt$ 2p

$B(t) = -\frac{3000}{0,2} \cdot \int \frac{0,2}{(1+0,2t)^2} dt = \frac{15.000}{1+0,2t} + C$ 2p

$t = 0 \Rightarrow B(0) = 15000 + C = 8000 \Rightarrow C = -7000$ 1p

$B(t) = \frac{15.000}{1+0,2t} - 7000 \leq 500$ 1p

din care $t \geq 5$ 1p